

京都大学 1970年 入学試験 文系数学 問題3

問題

BCは円Oの定弦で、その長さは $a$ 、またAはこの円の周上の動点とする。

このような $\triangle ABC$ において、

頂点A, B, Cから対辺におろした垂線の長さをそれぞれ $h, k, l$ とすると、  
 $\frac{kl}{h}$ は一定であることを証明せよ。

解答

辺BC, AC, ABの長さをそれぞれ、 $a, b, c$ とおく

三角形ABCの面積を $S$ とすると

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bk}{2} = \frac{cl}{2}$$

また頂点Aの角を $\theta$ としたとき

$$k = c \sin \theta \quad l = b \sin \theta$$

$$kl = bc \sin^2 \theta$$

$$\frac{ah}{2} = \frac{bk}{2} \text{ より } ah = bk$$

$$h = \frac{bk}{a}$$

$$\frac{kl}{h} = \frac{abc \sin^2 \theta}{bk} = \frac{ac \sin^2 \theta}{c \sin \theta} = a \sin \theta$$

点Aが小さな弧をはさむ場合 $\theta < \pi/2$ とする

大きな弧をはさむ場合を $\theta_l$ とすると

$$\theta_l = \pi - \theta$$

このとき $\sin \theta_l = \sin \theta$ であるから、

大きな弧をはさむ場合も小さな弧をはさむ場合も $\sin \theta$ は等しい

したがって点Aは一定の弦をはさむ周上の点なので $\sin \theta$ は一定

また、 $a$ も一定なので

$a \sin \theta$ は一定

よって $\frac{kl}{h}$ は一定