

京都大学 1975 年 入学試験 理系数学 問題 1

問題

あるスポーツ大会で、参加した n 個のチームはつぎの方法（リーグ戦形式）で順位を争う．すなわち、どのチームも他の各チームとそれぞれ 1 回ずつ試合を行い、勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では、引き分けが 1 回も起こらず、また同順位のチームがなかったという．このとき、どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

解答

n チームでリーグ戦を行うので、各チームは $n - 1$ 回のゲームを行う。

このとき引き分けが無く、同順位のチームが無いということは、各チームの勝ち数が異なることになる。

チーム数は n あって、結果が 0 勝から $n - 1$ 勝までの n 種類しか存在しないので、

最下位は全敗、首位は全勝、その間すべての勝ち数 l ($1 \leq l \leq n$) のチームがあることになる。

1 位から、 $n - 1$ 勝、 $n - 2$ 勝となるので、 k 位のチームは $n - k$ 勝となり、 $k - 1$ 敗していることになる。

首位は全勝なので、残りの全チームに勝っている。

第 k 位以上のチームが、すべて第 $k + 1$ 位以下のチームに全勝していると仮定すると $k + 1$ 位のチームは首位から k 位までのチームにすべて負けていることになる。

しかし、第 $k + 1$ 位のチームの負け数は k 敗なので、第 $k + 1$ 位のチームは第 $k + 2$ 位以下のチームには全勝していることになる。

・第 1 位のチームは第 2 位以下のチームに全勝している。

・第 k 位以上のチームが第 $k + 1$ 位以下のチームに全勝していると仮定すると、第 $k + 1$ 位のチームは $k + 2$ 位のチームに全勝して居る。

数学的帰納法によって、すべてのチームはそれより下位のチームには必ず勝っている。