

京都大学 1978年 入学試験 文系数学 問題1

問題

a, b, c を正の数とするととき, 不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$$

を証明せよ. また, 等号が成立するのはどんな場合か.

解答

$$(a+b+c) - 3\sqrt[3]{abc} - (a+b) + 2\sqrt{ab} = c - 3\sqrt[3]{abc} + 2\sqrt{ab}$$

$t^3 = c$ となるような実数 t を一つとる.

$$f(t) = t^3 - 3t\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt{ab} \text{ とすると}$$

$$f(0) = \sqrt{ab} > 0$$

$$f'(t) = 3t^2 - 3\sqrt[3]{ab}$$

より $t^2 = \sqrt[3]{ab}$ のとき $f'(t) = 0$ となる

$$\sqrt[3]{ab} > 0 \text{ なので } t = \pm\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$$

$t > 0$ より

$$t = \sqrt{\sqrt[3]{ab}}$$

のとき $f(t)$ は極小となる。

したがって $t > 0$ の範囲では、 $f(\sqrt{\sqrt[3]{ab}})$ が最小値となる。

$$t^2 = \sqrt[3]{ab}$$

$$t^3 = \sqrt{ab}$$

より

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\sqrt[3]{ab}}) &= t^3 - 3t\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt{ab} \\ &= t^3 - 3t^3 + 2t^3 = 0 \end{aligned}$$

よって $f(t) \geq 0$

したがってこの不等式は成立する。

また、等号となるのは $f(t) = 0$ となるときなので

上記の通り $c = \sqrt{ab}$ のとき

証明終了