

問題

$\triangle OAB$  の重心  $G$  を通る直線が、辺  $OA, OB$  とそれぞれ辺上の点  $P, Q$  で交わっているとする。  $\vec{OP} = h\vec{OA}$ ,  $\vec{OQ} = k\vec{OB}$  とし、 $\triangle OAB, \triangle OPQ$  の面積をそれぞれ  $S, T$  とすれば、次の関係が成り立つことを示せ。

1.  $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 3$
2.  $\frac{4}{9}S \leq T \leq \frac{1}{2}S$

解答

1.

$G$  は三角形  $OAB$  の重心なので

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3}$$

また、 $PQ$  は  $G$  を通るので

$$\vec{OG} = t(\vec{OQ} - \vec{OP}) + \vec{OP} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

以上より

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = t(\vec{OQ} - \vec{OP}) + \vec{OP}$$

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = tk\vec{OB} + h(1-t)\vec{OA}$$

が成り立つ

$OAB$  が三角形となるためには、 $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  は 1 次独立でなければならないので

この等式が成立するためには

$$tk = \frac{1}{3}$$

$$(1-t)h = \frac{1}{3}$$

でなければならない

$0 \leq k \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  より

$$tk = \frac{1}{3} \text{ となるためには } k \neq 0 \text{ ならば}$$

$$t = \frac{1}{3k} > \frac{1}{3}$$

したがって  $t \neq 0$  なので

$$k = \frac{1}{3t} > \frac{1}{3}$$

となり  $k = 0$  は不適当

また同様に

$h \neq 0$  ならば

$$(1-t) = \frac{1}{3h} > \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$t < \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって } k > \frac{1}{2}$$

同様に  $h > \frac{1}{2}$

したがって  $h, k, t$  は

$$\frac{1}{2} \leq h \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq k \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$$

の範囲

以上より  $t \neq 0$  なので

$$k = \frac{1}{3t}$$

$$h = \frac{1}{3(1-t)}$$

よって

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 3t + 3(1-t) = 3$$

2.

三角形 OPQ の面積  $T$  は  $\angle AOB = \theta$  とすると

$$T = |\vec{OP}| |\vec{OQ}| \sin \theta = hk |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta = hkS$$

$$hk = \frac{1}{9t(1-t)} \text{ なので}$$

$$T = \frac{1}{9t(1-t)} S \text{ である。}$$

$f(t) = 9t(1-t)$  ( $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$ ) とすると  $f'(t) = -18t + 9$  したがって

$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$  の範囲では  $f'(t) > 0$

$\frac{1}{2} < t < \frac{2}{3}$  の範囲では  $f'(t) < 0$

となり

$f(t)$  は  $t = \frac{1}{2}$  で最大値をとり  $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  の小さい方で最小値をとる。

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

したがって

$$\frac{4}{9}S \leq hkS = T < \frac{1}{2}S$$

証明終了