

京都大学 1979年 入学試験 文系数学 問題1

問題

平面上に6つの定点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ があって、どの3点も一直線上にはない。この6点のうちから3点を任意にえらぶ。えらんだ3点を頂点とする三角形の重心と、残りの3点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は、3点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ。

解答

始めに選んだ点を B_1, B_2, B_3 とし

のこりの点を B_4, B_5, B_6 とする。

また最初の3点の重心を G_1 、残りの3点の重心を G_2 とする。

適当な点 O を選んで O から各点 B_k へのベクトルを b_k とする。

重心へのベクトルを g_1, g_2 とする。

すると、 $g_1 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$

$g_2 = \frac{b_4 + b_5 + b_6}{3}$ となる。

$g_1 + g_2 = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{3}$

G_1 と G_2 の中点を G とし、 O からのベクトル g は $\frac{g_1 + g_2}{2}$ なので

$g = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{6}$

これは始めに b_1, b_2, b_3 をどのように選んでも一定

したがって、3点の選び方に無関係な点 G を通る。

証明終了