

問題

2人の人が1つのサイコロを1回ずつふり、大きい目を出した方を勝ちとすることにした。ただし、このサイコロは必ずしも正しいものではなく、 k の目の出る確率は p_k である($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)。このとき

1. 引き分けになる確率 P を求めよ。
2. $P \geq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また、 $P = \frac{1}{6}$ ならば、 $p_k = \frac{1}{6}$ である($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)ことを示せ。

解答

1.

二人の人がおなじ目を出した時に引き分けとなる。

したがってAさんが出した目を l ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)とするとBさんが l を出すときの確率が求める確率となる。

Aさんが l を出す確率は p_l そのとき、Bさんが l を出す確率も p_l なので

確率は $\sum_{k=1}^6 p_k^2$
となる。

$$P = \sum_{k=1}^6 p_k^2$$

2.

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ なので

$$\begin{aligned} P &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \\ &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \\ &\quad - 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_1p_6 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_2p_6 \\ &\quad + p_3p_4 + p_3p_5 + p_3p_6 + p_4p_5 + p_4p_6 + p_5p_6) \end{aligned}$$

相加平均 \geq 相乗平均より

$$p_k p_l \leq \left(\frac{p_k + p_l}{2} \right)^2$$

よって

$$\begin{aligned}
& p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_1p_6 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_2p_6 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_3p_6 + p_4p_5 + p_4p_6 + p_5p_6 \\
& \leq \frac{1}{4}((p_1 + p_2)^2 + (p_1 + p_3)^2 + (p_1 + p_4)^2 + (p_1 + p_5)^2 + (p_1 + p_6)^2 \\
& \quad + (p_2 + p_3)^2 + (p_2 + p_4)^2 + (p_2 + p_5)^2 + (p_2 + p_6)^2 \\
& \quad + (p_3 + p_4)^2 + (p_3 + p_5)^2 + (p_3 + p_6)^2 \\
& \quad + (p_4 + p_5)^2 + (p_4 + p_6)^2 + (p_5 + p_6)^2) \\
& = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 + p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3 + p_1^2 + p_4^2 + 2p_1p_4 + p_1^2 + p_5^2 + 2p_1p_5 + p_1^2 + p_6^2 + 2p_1p_6 \\
& \quad + p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3 + p_2^2 + p_4^2 + 2p_2p_4 + p_2^2 + p_5^2 + 2p_2p_5 + p_2^2 + p_6^2 + 2p_2p_6 \\
& \quad + p_3^2 + p_4^2 + 2p_3p_4 + p_3^2 + p_5^2 + 2p_3p_5 + p_3^2 + p_6^2 + 2p_3p_6 \\
& \quad + p_4^2 + p_5^2 + 2p_4p_5 + p_4^2 + p_6^2 + 2p_4p_6 + p_5^2 + p_6^2 + 2p_5p_6) \\
& = \frac{1}{4}(5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\
& \quad + 2(p_1p_6 + p_1p_5 + p_1p_4 + p_1p_3 + p_1p_2 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_2p_6 \\
& \quad + p_3p_4 + p_3p_5 + p_3p_6 + p_4p_5 + p_4p_6 + p_5p_6))
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
& 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_1p_6 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_2p_6 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_3p_6 + p_4p_5 + p_4p_6 + p_5p_6) \\
& \leq 5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2)
\end{aligned}$$

したがって

$$P \geq 1 - 5P$$

よって

$$6P \geq 1$$

$$P \geq \frac{1}{6}$$

またこの不等式が一致するためには $p_1 = p_2, p_2 = p_3, p_3 = p_4, p_4 = p_5, p_5 = p_6$ がすべて成立するとき

よって

$$p_k = \frac{1}{6}$$

証明終了