

京都大学 1982年 入学試験 文系数学 問題2

問題

校庭に、南北の方向に1本の白線が引いてある。ある人が、白線上の点Aから西へ5メートルの点に立ち、銅貨を投げて、表が出たときは東へ1メートル進み、裏が出たときは北へ1メートル進む。白線に達するまで、これを続ける。

1. A点から n メートル北の点に達する確率 p_n を求めよ。
2. p_n を最大にする n を求めよ。

解答

スタートする点を $(0, 0)$ とし、東に x メートル、北に y メートルの点を (x, y) と表す。すると、A点から北に n メートルの点は $(5, n)$ となる。この点 $(5, n)$ を P_n とする。

$(5, n-1)$ の点に到達したときにはその時点で終了するので点 P_n に到達するためには、その直前に $(4, n)$ の点にいないといけない。

また P_n に到達するためには、それまでの $5+n$ 回硬貨を投げなければならないので結果、 P_n に到達するためには $n+4$ 回の投げて $(4, n)$ に到達し、次に投げた硬貨が表になる必要がある。

よって p_n は $n+4$ 回なげて、表が4回出る確率にもう一度表が出る確率をかけたものとなる。

したがって

$$p_n = \frac{{}^{n+4}C_4}{2^{5+n}} = \frac{(n+4)!}{4!n!2^{5+n}} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{8+n}}$$

となる。

$$p_n = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{n+8}}$$

2.

$$\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{8+n}} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2^{7+n}} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{n+7}} \left(\frac{n+4}{2} - n \right) \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{n+8}} (4-n) \end{aligned}$$

となり

$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2^{n+8}}$ は常に正なので

$n < 4$ のとき $p_n > p_{n-1}$

$n = 4$ のとき $p_n = p_{n-1}$

$n > 4$ のとき $p_n < p_{n-1}$

よって p_n は n が 0 から 3 までは増加し

$p_4 = p_3$ となり

n が 4 より大きいときは減少する。

したがって p_n が最大となるのは $n = 3, 4$ のとき

$$p = 3, p = 4$$

証明終了