

問題

つぼの中に r 個 ($r \geq 1$) の赤球と, s 個 ($s \geq 0$) の白球が入っている. A と B の 2 人が, 交互に球を 1 個ずつとり出し, 先に赤球をとり出した者を勝者とするゲームをする. ただし, とり出した球は, もとにもどさないものとする.

1. ちょうど i 回目 (すなわち A, B 2 人のとり出した球の合計が, ちょうど i 個になった時) に勝者がきまる確率を P_i とするとき, $P_i \geq P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) となることを示せ.
2. このゲームを A からはじめるとする. 任意の r, s に対して, A が勝者となる確率は, $\frac{1}{2}$ またはそれ以上であることを示せ. また, A が勝者となる確率が $\frac{1}{2}$ となるための, r と s の条件を求めよ.

解答

1. 1 回目で勝者が決まる確率は $\frac{r}{r+s}$
 したがって 1 回目で勝者が決まらない確率は $\frac{s}{r+s}$
 i 回目で勝者が決まるためには, $i-1$ 回目まで勝者が決まらないことが必要.
 n 回目まで勝者が決まらなかったということはこれまでに n 個の白球が取り出されていることになり n 回目まで勝者が決まらなかった確率を Q_n とすると $n+1$ 回目にも勝者が決まらない確率は $Q_{n+1} = \frac{s-n}{r+s-n} Q_n$ となる
 $P_i = Q_{i-1} \frac{r}{r+s-(i-1)}$
 $P_{i+1} = Q_i \frac{r}{r+s-i}$
 $Q_{n+1} = \frac{s-n}{r+s-n} Q_n$ より $Q_i = \frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)} Q_{i-1}$ なので
 $P_{i+1} = \frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)} \frac{r}{r+s-i} Q_{i-1}$

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1}}{P_i} &= \frac{\frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)} \frac{r}{r+s-i} Q_{i-1}}{Q_{i-1} \frac{r}{r+s-(i-1)}} \\ &= \frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)} \frac{r}{r+s-i} \frac{r+s-(i-1)}{r} \\ &= \frac{r(s-(i-1))(r+s-(i-1))}{r(r+s-(i-1))(r+s-i)} \\ &= \frac{s-(i-1)}{(r+s-i)} \end{aligned}$$

$r \geq 1$ より $s-i+1 \leq s-i+r$ なので, $\frac{P_{i+1}}{P_i} \leq 1$

以上により,

$$P_i \geq P_{i+1}$$

2. ゲームを A から始めるとすると, 奇数回目に A が引き, 偶数回目に B が引くことになる.

s が奇数の場合 A が勝つ確率は $P_A = P_1 + P_3 + P_5 + P_7 \cdots + P_s$

B が勝つ確率は $P_B = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 \cdots + P_{s+1}$

s が偶数の場合は A が勝つ確率は $P_A = P_1 + P_3 + P_5 + P_7 \cdots + P_{s+1}$

B が勝つ確率は $P_B = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 \cdots + P_s$

となる。

どちらにしても、1 で示したとおり $P_i \geq P_{i+1}$ なので、常に $P_1 \geq P_2, P_3 \geq P_4, \dots$ となり、 $P_A \geq P_B$
 $P_A + P_B = 1$ なので、

$$P_A \geq \frac{1}{2}$$

確率 P_A がちょうど $\frac{1}{2}$ となるためには、A が勝つ確率と B が勝つ確率が等しくなければならない。

仮に $P_1 > P_2$ だとすると、その後の確率 P_3 以降がすべて等しく s が奇数だったとしても P_A と P_B が等しくなる事はない。

したがって、 $P_1 = P_2$ でなければならない。 P_1 は $\frac{r}{r+s}$ で、 P_2 は $\frac{s}{r+s} \frac{r}{r+s-1}$ なのでこれが等しくなる為には

$$\frac{r}{r+s} = \frac{s}{r+s} \frac{r}{r+s-1}$$

$$1 = \frac{s}{r+s-1}$$

$$s = r + s - 1$$

$$r - 1 = 0$$

$$r = 1$$

となる。

P_A と P_B が等しくなるためには、 $P_s = P_{s+1}$ が等しくならねばならないので、 s が奇数である必要がある。

以上から、 $r = 1$ かつ s が奇数であることが必要。