

京都大学 1970年 入学試験 文系数学 問題1

問題

方程式 $x^3 - 2x + k = 0$ は、 k がどんな値をとるとき重根をもつか。

解答

$f(x) = x^3 - 2x + k$ とする。

$f(x) = 0$ が重根を持つということは、

$f'(x) = 0$ の点で解をもつということ

$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$ を解くと

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

このとき $f(x) = 0$ となればいいので $f(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = 0$

$$f(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = (\pm\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) + k = 0$$

よって

$$\begin{aligned} k &= -(\pm\sqrt{\frac{2}{3}})^3 + 2(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) \\ &= -(\pm\sqrt{\frac{2}{3}})(\frac{2}{3}) + 2(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) \\ &= (\pm\sqrt{\frac{2}{3}})(2 - \frac{2}{3}) \\ &= (\pm\sqrt{\frac{2}{3}})(\frac{4}{3}) \end{aligned}$$

よって

$$k = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$