

京都大学 1970年 入学試験 文系数学 問題2

問題

数学的帰納法によって、 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ。
ここに n は 2 以上の整数とする。

解答

$$f(n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad g(n) = n! \text{ とする。}$$

$n = 2$ の時

$$f(2) - g(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2! = \left(\frac{9}{4}\right) - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

よって $f(2) > g(2)$

したがって $n = 2$ のとき不等式は成り立つ。

$n = k - 1$ のとき成り立つと仮定すると

$n = k$ のとき

$$f(k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

$$f(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^{k-1}$$

$$kf(k-1) = \left(\frac{k^k}{2^{k-1}}\right)$$

となる。

ここで $\frac{f(k)}{kf(k-1)}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{f(k)}{kf(k-1)} &= \left(\frac{(k+1)^k}{2^k}\right) \left(\frac{2^{k-1}}{k^k}\right) \\ &= \left(\frac{(k+1)^k 2^{k-1}}{2^k k^k}\right) \\ &= \left(\frac{(k+1)^k}{2k^k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ を 2 項展開すると

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \binom{k}{1} \left(\frac{1}{k}\right)^1 + \binom{k}{2} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \binom{k}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \right. \\
&\quad \left. \cdots + \binom{k}{k-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{k}\right)^k \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{k(k-1)}{2!} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \left(\frac{1}{k}\right)^3 + \right. \\
&\quad \left. \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(2)}{(k-1)!} \left(\frac{1}{k}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{k}\right)^k \right)
\end{aligned}$$

ここで右辺の括弧内の項はすべて正なので括弧内は最初の2項の和2より大きい

したがって右辺は1より大きい

つまり $\frac{f(k)}{kf(k-1)} > 1$

$f(n) > 0$ より $kf(k-1)$ を両辺にかけても不等号は変わらないので

$$f(k) > kf(k-1)$$

仮定より

$$kf(k-1) > kg(k-1) = g(k) \text{ なので}$$

$$f(k) > kf(k-1) > g(k)$$

以上より $n = k - 1$ のとき成立すると仮定すれば、 $n = k$ のときも成立する。

よって数学的帰納法より

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n! \text{ は } n \geq 2 \text{ において成立する。}$$