

京都大学 1970年 入学試験 理系数学 問題6

問題

a は $1 < a < 2$ をみたす定数とする.

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{3}$$

によって定められた数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $1 < x_n < a$ ($n = 2, 3, \dots$)
- (2) $x_n - 1 \leq \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} (x_1 - 1)$ ($n = 2, 3, \dots$)
- (3) この数列の極限值を求めよ.

解答

(1)

x_2 について確認する.

$1 < a < 2$ なので

$$\frac{1+2}{3} = 1 < x_2 = \frac{a^2+2}{3} \quad x_2 - x_1 = \frac{a^2+2}{3} - a = \frac{a^2-3a+2}{3} = \frac{(a-2)(a-1)}{3}$$

$1 < a < 2$ より $(a-2) < 0, (a-1) > 0$

よって $x_2 - x_1 < 0$ 以上より $1 < x_2 < a$

$1 < x_n < a$ が成立していると仮定する

$x_n > 1$ ならば

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{3} > \frac{1^2 + 2}{3} = 1$$

よって $x_{n+1} > 1$

帰納法より $x_n > 1$

次に $x_{n+1} - x_n$ を考えると

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n^2 + 2}{3} - \frac{x_{n-1}^2 + 2}{3} \\ &= \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{3} \\ &= \frac{(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}{3} \end{aligned}$$

$x_n > 1$ なので $x_n + x_{n-1} > 1$

したがって

$x_n < x_{n-1}$ ならば $x_{n+1} < x_n$

$x_2 < x_1$ は成立しているので帰納法より $x_n < x_{n-1}$

よって $x_n < x_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 = a$

以上より

$$1 < x_n < a$$

(2)

$$f(n) = \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} (x_1 - 1) - (x_n - 1) \text{ とおく}$$

$k = 2$ のとき

$$\begin{aligned}
f(2) &= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_1 - 1) - (x_2 - 1) \\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(a - 1) - \left(\frac{a^2+2}{3} - 1\right) \\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(a - 1) - \left(\frac{a^2-1}{3}\right) \\
&= (a - 1)\left(\frac{a+1 - (a+1)}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

$k > 2$ において

$$\begin{aligned}
f(k) &= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1} - 1) - (x_k - 1) \\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1} - 1) - \left(\frac{x_{k-1}^2 + 2}{3} - 1\right) \\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1} - 1) - \left(\frac{x_{k-1}^2 - 1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1} - 1) - \left(\frac{(x_{k-1} - 1)(x_{k-1} + 1)}{3}\right) \\
&= (x_{k-1} - 1)\left(\frac{a+1 - (x_{k-1} + 1)}{3}\right) \\
&= (x_{k-1} - 1)\left(\frac{a - x_{k-1}}{3}\right)
\end{aligned}$$

(1) により $1 < x_n < a$ なので

$$a - x_{k-1} > 0 \text{ かつ } x_{k-1} - 1 > 0$$

以上より

$k = 2$ において

$$f(2) = 0$$

$k > 2$ において

$$f(k) > 0$$

つまり $n \geq 2$ において

$$(x_n - 1) \leq \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{n-1} - 1)$$

(3)

以下のような数列 y_n を考える。

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$y_n = \left(\frac{a+1}{3}\right)y_{n-1} \quad (n > 1)$$

$n = 2$ のとき

$$y_2 = \left(\frac{a+1}{3}\right)y_1 = \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_1 - 1) \geq x_2 - 1 \quad (2) \text{ より}$$

$$x_2 - 1 \leq y_2$$

$n = k - 1$ のとき成り立つと仮定すると

$$y_k = \left(\frac{a+1}{3}\right)y_{k-1} \geq \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1} - 1) \geq x_k - 1$$

よって $n \geq 2$ において $x_n - 1 \leq y_n$

$1 < a < 2$ より

$$\frac{2}{3} < \frac{a+1}{3} < 1$$

y_n は等比数列で比は $\frac{a+1}{3}$

したがって初項 $y_1 = a - 1$ より

$$y_n = \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} (a-1)$$

したがって、 y_n は収束して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} (a-1)$$

$\frac{a+1}{3} < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} = 0$$

$a-1$ は定数なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$1 < x_n < y_n + 1$ より

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n + 1$$

前述の通り y_n は収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ なので

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$