

問題

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ の上の点 $P(x, y)$ を媒介変数 u を使って, $x = a \cos u, y = b \sin u (0 \leq u < 2\pi)$ で表す. 時間を t とし, P は t の変化につれて次のように移動する. 時刻 $t = 0$ のとき点 P は $(a, 0)$ にあり, その後この楕円上を時計の針の進行方向と逆の方向に動く. 時刻 $t (> 0)$ までに線分 OP の通過した部分の面積を S とする. つねに $\frac{dS}{dt} = 1$ であるとき, u を t の関数として表わせ. (O は原点である.)

解答

OP の移動する図形は、半径1内角 u の扇形を、 x 方向に a 倍、 y 方向に b 倍したものに等しい。
したがって、

$$S = abu$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du} \frac{du}{dt}$$

より、

$$\frac{dS}{du} \frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dS}{du} = ab$$

より

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{ab}$$

よって、 $u = f(t)$ とすると

$$f'(t) = \frac{1}{ab}$$

より、 $f(t) = \frac{1}{ab}t + c$ (c は定数)

$f(0) = 0$ より、 $c = 0$

よって、

$$u = \frac{t}{ab}$$