

京都大学 1973年 入学試験 理系数学 問題1

問題

10進法で3けたの整数 $\alpha (\geq 0)$ をとり、 α の一の位の数と百の位の数を入れかえてできる数を α' とする。
ただし、1けたの数、2けたの数もそれぞれその前に00および0をつけて3けたの数とみなす。

α が0から999までのすべての整数をとるとき、整数 $\alpha - \alpha'$ 全体の集合を A とし、

A に含まれる正の整数全体の集合を B とする。

このとき

1. A, B に属する整数の個数を求めよ。
2. B の属する整数の総和を求めよ。

解答

1.

$\alpha = 100a + 10b + c$ とおくと

$\alpha' = 100c + 10b + a$ となり

$\alpha - \alpha' = 100(a - c) + c - a = 99(a - c)$ となる。

a, c 共に、0から9の範囲をそれぞれ移動し、すべての組合せが存在する。

そのそれぞれについて、 b が0から9までの10通りが考えられるがそれらはすべて整数としてはおなじものなので要素としては1つと数える。

したがって、 $(a - c)$ の可能なすべての組合せは100通りあるが、実際に異なるものは9から-9までの19通りしかない。

そのそれぞれについて、 $99(a - c)$ については異なる値となるので、

A に属する整数の個数は、19個

9から-9の範囲で、正なるものは、9から1までの9個

B に属する数の個数は9個

2.

B に属する整数は、1から9に99をかけたものなので、その総和は

$$\sum_{k=1}^9 99k = 45 * 99 = 4455$$

よって、 B に属する整数の総和は4455