

京都大学 1973年 入学試験 理系数学 問題6

問題

当たりくじが確率 p ($0 < p < 1$) で現れるくじがあり、たかだか二回引くことができる。
 各自、最初に得点 1 をもってこのくじを引き、当たりくじならば得点 1 を加え、そうでなければ 1 だけ減ずる。
 くじを引き終えたときの合計得点が負または 0 ならば受け取る報酬は 0、
 正ならばその得点そのまま報酬になるものとする。
 このとき、A 君は一度もくじを引かないことに決め、B 君は一度くじを引き、当たればそこで止め、当たらないければもう一度引くことに決め、C 君は当たる当たらないにかかわらず二回引くことに決めた。
 A, B, C 三君の報酬の期待値を比較し、誰が一番有利であるかを判定せよ。

解答

まず、A 君は、くじを引かないので、常に結果は 1
 したがって、期待値は 1
 次に B 君は、1 回目に当たる確率は p 、そのときはもう引かないので、報酬は 2
 当たらない確率は $1 - p$ そのときはもう一度引くので、2 回目に当たる確率は $(1 - p)p$ でこのときの報酬は 1、
 2 回目に当たらない確率は $(1 - p)^2$ で報酬は 0
 したがって期待値は $p \cdot 2 + p(1 - p) \cdot 1 + (1 - p)^2 \cdot 0 = 2p + p(1 - p) = 3p - p^2$
 C 君は必ず 2 回引くので 1 回目と 2 回目の結果をそれぞれ表にすると、確率と報酬を (p, v) で表すとすると

	1 回	
	当たり	はずれ
2 当たり	$(p^2, 3)$	$((1 - p)p, 1)$
回 はずれ	$(p(1 - p), 1)$	$((1 - p)^2, 0)$

よって、期待値は $p^2 \cdot 3 + (1 - p)p \cdot 1 + p(1 - p) \cdot 1 + (1 - p)^2 \cdot 0 = p^2 + 2p$
 A, B, C 君のそれぞれの期待値を E_A, E_B, E_C とすると
 $E_A = 1, E_B = p(3 - p), E_C = p(p + 2)$
 $E_C - E_B = p(p + 2) - p(3 - p) = p^2 + 2p - 3p + p^2 = 2p^2 - p = p(2p - 1)$
 $0 < p < 1$ なので $2p - 1$ の正負で、この値の正負が決まる。
 つまり、 $2p - 1 > 0 \rightarrow p > 1/2$ のとき、 $E_C > E_B$
 逆に $p < 1/2$ のとき、 $E_C < E_B$
 次に $E_B - 1 = p(3 - p) - 1 = 3p - p^2 - 1 = 0$ として p を解くと
 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ なので、 $0 < p < 1$ の範囲で考えると、 $p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ で 0 となる。その前後で負から正
 に変わるの、 $p < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ の範囲では、 $E_B < E_A$
 $p > \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ の範囲では、 $E_B > E_A$
 次に $E_C - 1 = p(p + 2) - 1 = p^2 + 2p - 1 = 0$ として p を解くと
 $p = -1 \pm \sqrt{2}$
 $0 < p < 1$ の範囲では、 $p = -1 + \sqrt{2}$ で 0 となる。
 この前後で、値は負から正に変わるの、
 $p < -1 + \sqrt{2}$ で $E_C < E_A$

$$p > -1 + \sqrt{2} \text{ で } E_C > E_A$$
$$0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < -1 + \sqrt{2} < 1/2 < 1 \text{ より}$$

$$p < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ の場合}$$

$$E_C < E_B < E_A$$

よって A 君が最も有利

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < p < -1 + \sqrt{2} \text{ の場合}$$

$$E_C < E_A < E_B$$

よって B 君が最も有利

$$-1 + \sqrt{2} < p < 1/2 \text{ の場合}$$

$$E_A < E_C < E_B$$

よって B 君が最も有利

$$1/2 < p \text{ の場合}$$

$$E_A < E_B < E_C$$

よって C 君が最も有利