京都大学　1974 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

$(x^3+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt[3]{3}\,x+1)^{100}$ を展開したときの，x^{296} の係数を求めよ．

解答

$x^3+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt[3]{3}\,x+1=0$ の解を (a,b,c) とすると、
x の 3 次の係数が 1 なので
$x^3+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt[3]{3}\,x+1=(x-a)(x-b)(x-c)$ と分解される。このとき、$(x^3+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt[3]{3}\,x+1)^{100}$ をかんがえると
$(x^3+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt[3]{3}\,x+1)^{100}=((x-a)(x-b)(x-c))^{100}$
これを展開すると、x^{296} の係数は $-a,-b,-c$ を $300-296=4$ 回使って作れる組み合わせの和
つまり、
$a,a,a,a,{}_{100}\mathrm{C}_4=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{4\cdot 3\cdot 2}=3921225$ 通り
$a,a,a,b,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り
$a,a,a,c,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り
$a,a,b,b,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_2=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot\dfrac{100\cdot 99}{2}=24502500$ 通り
$a,a,b,c,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot 100\cdot 100=49500000$ 通り

$a,a,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_2=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot\dfrac{100\cdot 99}{2}=24502500$ 通り
$a,b,b,b,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り
$a,b,b,c,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot 100\cdot 100=49500000$ 通り
$a,b,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot 100\cdot 100=49500000$ 通り
$a,c,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り
$b,b,b,b,{}_{100}\mathrm{C}_4=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{4\cdot 3\cdot 2}=3921225$ 通り
$b,b,b,c,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り

$b,b,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_2\cdot{}_{100}\mathrm{C}_2=\dfrac{100\cdot 99}{2}\cdot\dfrac{100\cdot 99}{2}=24502500$ 通り
$b,c,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_3\cdot{}_{100}\mathrm{C}_1=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2}\cdot 100=16170000$ 通り
$c,c,c,c,{}_{100}\mathrm{C}_4=\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{4\cdot 3\cdot 2}=3921225$ 通り
よって係数は

$$3921225a^4+16170000a^3b+16170000a^3c+24502500a^2b^2+49500000a^2bc$$
$$+24502500a^2c^2+16170000ab^3+49500000ab^2c+49500000abc^2+16170000ac^3$$
$$+3921225b^4+16170000b^3c+24502500b^2c^2+16170000bc^3+3921225c^4$$

$$
\begin{aligned}
&3921225a^4+16170000a^3b+16170000a^3c+24502500a^2b^2+49500000a^2bc\\
&\quad+24502500a^2c^2+16170000ab^3+49500000ab^2c+49500000abc^2+16170000ac^3\\
&\quad+3921225b^4+16170000b^3c+24502500b^2c^2+16170000bc^3+3921225c^4\\
&=3921225(a^4+b^4+c^4)+\\
&\quad+16170000(a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3)\\
&\quad+24502500(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+\\
&\quad+49500000(ab^2c+abc^2+a^2bc)\\
&=3921225(a^4+b^4+c^4)\\
&\quad+16170000(a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3)\\
&\quad+24502500(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\\
&\quad+49500000(abc)(a+b+c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
abc &= -1\\
a+b+c &= -\sqrt{2}\\
ab+bc+ac &= \sqrt[3]{3}\\
a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)\\
&= 2-2\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\\
&=(ab+bc+ca)^2-2(abc)(a+b+c)\\
&=\sqrt[3]{3}^2-2\sqrt{2}\\
&a^4+b^4+c^4\\
&=-8(abc)(a+b+c)+(a+b+c)^4-4(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)-6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\\
&=-8(-1)(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})^4-4(\sqrt[3]{3})(2-2\sqrt[3]{3})-6(\sqrt[3]{3}^2-2\sqrt{2})\\
&=2\sqrt[3]{3}^2-8\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}+4\\
&a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3\\
&=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)-abc(a+b+c)\\
&=(\sqrt[3]{3})(2-2\sqrt[3]{3})-(\sqrt{2})\\
&=-2\sqrt[3]{3}^2+2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&3921225(a^4+b^4+c^4)\\
&\quad+16170000(a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3)\\
&\quad+24502500(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\\
&\quad+49500000(abc)(a+b+c)\\
&=3921225(2\sqrt[3]{3}^2-8\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}+4)\\
&\quad+16170000(-2\sqrt[3]{3}^2+2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})\\
&\quad+24502500(\sqrt[3]{3}^2-2\sqrt{2})\\
&\quad+49500000(\sqrt{2})\\
&=4950\sqrt[3]{3}^2+970200\sqrt[3]{3}+9900\sqrt{2}+15684900
\end{aligned}
$$

$$4950\sqrt[3]{3}^2+970200\sqrt[3]{3}+9900\sqrt{2}+15684900$$