

京都大学 1974年 入学試験 文系数学 問題4

問題

$F(x), g(x)$ が x の多項式で、次の三条件をみたすものとする。 $F(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

(イ) $\frac{dF(x)}{dx} = g(x)$.

(ロ) $F(x)$ は $g(x)$ で割り切れる .

(ハ) $g(x)$ は n 次式で、 x^n の係数は 1 、 x^{n-1} の係数は 0 である .

解答

$g(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1x + a_0$ とおく

$g(x) = 0$ の解を $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ とすると

$g(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \dots (x - b_n)$ と因数分解される。

したがって、 x^{n-1} の係数は $-b_1 - b_2 - b_3 - \dots - b_n$ となりこれが 0 である。

$\frac{dF(x)}{dx} = g(x)$ より $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{n-1}a_{n-2}x^{n-1} + \dots + \frac{1}{2}a_1x^2 + a_0x + c$ となる。

ここで、 $F(x)$ が $g(x)$ で割り切れることから、

$F(x)$ は $n+1$ 次の多項式なので

$F(x) = t(x - b)g(x)$ とかけるので

$F(x) = t(x - b)(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \dots (x - b_n)$ となる。

x^{n+1} の係数は $\frac{1}{n+1}$ だから、 $t = \frac{1}{n+1}$

x^n の係数は $t(-b - b_1 - b_2 - b_3 - \dots - b_n)$ となるが、 $F(x)$ の展開から、これは 0 なので

$t(-b - b_1 - b_2 - b_3 - \dots - b_n) = 0$

$-b_1 - b_2 - b_3 - \dots - b_n = 0$ なので $t(-b) = 0$

しかし、 $t \neq 0$ なので、 $b = 0$

したがって、 $F(x) = \frac{1}{n+1}xg(x)$

よって

$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{n+1}(g(x) + xg'(x)) = g(x)$ であるから

$xg'(x) = ng(x)$

$xg'(x) = nx^n + (n-2)a_{n-2}x^{n-2} \dots + a_1x$

$ng(x) = nx^n + na_{n-2}x^{n-2} + \dots + na_1x + na_0$

となり、係数がすべて一致しなければならないので

$(n-2)a_{n-2} = na_{n-2}$

$(n-3)a_{n-3} = na_{n-3}$

⋮

$a_1 = na_1$

$0 = na_0$

したがって、 a_0 から a_{n-2} はすべて 0

以上より、

$g(x) = x^n$

したがって

$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ であるが、 $g(x)$ で割り切れることから

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$