

京都大学 1974年 入学試験 理系数学 問題2

問題

内部の形が半径 10cm の半球形の容器（へりの大円が上部，水平におかれている）に水がいっぱい入っている．ここから水をくみ出すのに，水面の下がる速さを v cm/秒（一定）にしたい（もちろん，からになる時点までの範囲に限定する）．

1. t 秒間にくみ出す水の量はどれだけか．ただし $0 \leq t \leq \frac{10}{v}$
2. t 秒後において水をくみ出す速さはどれだけか，単位は $\text{cm}^3/\text{秒}$ で求めよ．ただし $0 < t < \frac{10}{v}$

解答

t 秒後に残っている水の量は

底面から、 $10 - vt$ cm の高さまでの水の量

これは、 $(x - 10)^2 + y^2 = 10^2$ の円の $x > 0$ の部分と、 $x = vt$ の直線で囲まれる図形を x 軸に回転させて得られる図形の体積に等しい。

したがって、この体積は

$$\int_0^{10-vt} \pi y^2 dx = \int_0^{10-vt} \pi(20x - x^2) dx$$

$$\int_0^{10-vt} \pi(20x - x^2) dx = \pi \left[\frac{-2x^3 + 60x^2}{6} \right]_0^{10-vt}$$

$$= \frac{\pi(vt - 10)^2(vt + 20)}{3}$$

$$= \pi \left(\frac{v^3 t^3 - 300vt + 2000}{3} \right)$$

したがって、 t 秒間に汲み出す水の量は

半球の体積 $\frac{2\pi 10^3}{3} = \frac{2000\pi}{3}$ から

残っている量 $\pi \left(\frac{v^3 t^3 - 300vt + 2000}{3} \right)$ を引いたものだから

$$\pi \left(\frac{-v^3 t^3 + 300vt}{3} \right)$$

この時の汲み出す速度は $f(t) = \pi \left(\frac{-v^3 t^3 + 300vt}{3} \right)$ を t について微分したものであるので $f'(t) = \pi v(100 - v^2 t^2)$

よって、汲み出す速度は

$$\pi v(100 - v^2 t^2) \text{ cm}^3/\text{秒}$$