

京都大学 1975年 入学試験 文系数学 問題2

問題

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + a$ とする. x の正の値に対し, つねに $f(x) > 0$ となるのはどのようなときか.

解答

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (x - 3)(3x - 1)$$

より

$f(x)$ は,

$x < \frac{1}{3}$ で単調増加

$x = \frac{1}{3}$ で極大

$\frac{1}{3} < x < 3$ で単調減少

$x = 3$ で極小

$3 < x$ で単調増加

となる。

したがって、 $x > 0$ における最小値は

$f(0)$ と $f(3)$ の小さい方

$$f(0) = a$$

$$f(3) = a - 9$$

なので、 $a - 9 < a$

したがって、 $a - 9 > 0$ のとき、つまり $a > 9$ のとき、 x の正の値に対して $f(x) > 0$ となる。