

京都大学 1975年 入学試験 理系数学 問題3

問題

α, β, γ がこの順に等差数列であり, $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか.

解答

α, β, γ が等差数列であることから公差を d とおくと

$$\beta = \alpha + d, \gamma = \alpha + 2d$$

また、 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ が等比数列であることから、公比を r とおくと

$$\sin \beta = r \sin \alpha, \sin \gamma = r^2 \sin \alpha$$

となる。

これを合わせると

$$\sin(\alpha + d) = r \sin \alpha, \sin(\alpha + 2d) = r^2 \sin \alpha$$

となる。

加法定理より

$$\sin(\alpha + d) = \sin \alpha \cos d + \cos \alpha \sin d = r \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + 2d) = \sin \alpha \cos 2d + \cos \alpha \sin 2d = r^2 \sin \alpha$$

よって

$$\cos d + \frac{\cos \alpha \sin d}{\sin \alpha} = r$$

$$\cos 2d + \frac{\cos \alpha \sin 2d}{\sin \alpha} = r^2$$

$$1 - 2\sin^2 d + \frac{2 \cos \alpha \sin d \cos d}{\sin \alpha} = r^2$$

$$\sin \alpha = a$$

$$\sin d = b$$

$$\cos \alpha = c$$

$$\cos d = f$$

と書き換えると

$$f + \frac{cb}{a} = r \tag{1}$$

$$1 - 2b^2 + \frac{2cbf}{a} = r^2 \tag{2}$$

(1) を (2) に代入して

$b^2 + f^2 = 1$ 、 $a^2 + c^2 = 1$ が成立するので

$$1 - 2b^2 + \frac{2cbf}{a} = \left(f + \frac{cb}{a}\right)^2$$

$$1 - 2b^2 + \frac{2cbf}{a} = f^2 + 2f\frac{cb}{a} + \frac{c^2b^2}{a^2}$$

$$a^2 - 2a^2b^2 + 2abcf = a^2f^2 + 2abcf + c^2b^2$$

$$a^2 - 2a^2b^2 - a^2f^2 - c^2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2a^2(1 - f^2) - a^2f^2 - c^2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2a^2 + 2a^2f^2 - a^2f^2 - c^2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2a^2 + a^2f^2 - c^2 + c^2f^2 = 0$$

$$-a^2 - c^2 + f^2(a^2 + c^2) = 0$$

$$-b^2(a^2 + c^2) = 0$$

$$-b^2 = 0$$

したがって

$$b = 0$$

$$\sin d = 0$$

$$\text{よって、} d = n\pi$$

$$\beta = \alpha + d = \alpha + n\pi \quad \gamma = \alpha + 2d = \alpha + 2n\pi \quad \text{よって}$$

$$\sin \beta = \sin(\alpha + n\pi) = \sin \alpha \cos n\pi + \cos \alpha \sin n\pi = (-1)^n \sin \alpha$$

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin \alpha \cos 2n\pi + \cos \alpha \sin 2n\pi = \sin \alpha$$

$$\text{よって、} r = (-1)^n$$

$$n \text{ が奇数の時は、} r = -1$$

$$n \text{ が偶数の時は、} r = 1$$

つまり、

α, β, γ は、初項 α 、公差 $n\pi$ の等差数列

$\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ は初項 $\sin \alpha$ 、公比 ± 1 の等比数列

となる。