

問題

n と a_1, a_2, \dots, a_n は自然数であって, 不等式

$$2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) - 2 > 0$$

をみたすものとする. $S = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) - 2$ とおく.

1. とくに $n = 3$ として, S を最小にする (a_1, a_2, a_3) を求めよ.
2. n も自由に動かした可能なすべての組 $(n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ のうちで, S を最小にするものを求めよ.

解答

1.

$$n = 3 \text{ より } 2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$$

$$a_1 = b$$

$$a_2 = b + c$$

$$a_3 = b + d$$

としたとき

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{b} + 1 - \frac{1}{b+c} + 1 - \frac{1}{b+d} - 2 \\ &= 1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{b+d} \end{aligned}$$

ここで、

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+c} - \frac{1}{x+d} \text{ において}$$

x について微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{(x+c)^2} + \frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{x^2}$$

いま、 b, c, d はすべて正なので

$$f'(x) > 0$$

よって、 $f(x)$ は単調減少。したがって、 $f(x)$ は任意の c, d について $b = 2$ において、最小となる。よって、

$$f(x) \text{ の最小値は、常に } f(2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2+c} - \frac{1}{2+d}$$

次に

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+d} \text{ を考えると}$$

これを微分すると

$$g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

これは上記と同様常に正なので $g(x)$ は単調増加

したがって、任意の d について、 $g(x)$ は $x = 0$ において最小となる。

$$\text{よって } g(x) \text{ の最小値は、} g(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2+d} = -\frac{1}{2+d}$$

しかし、この値では $S > 0$ が成り立たないので、 $x \geq 1$

$$\text{よって、} g(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2+d} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2+d}$$

次に $h(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2+x}$

とおくと

$$h'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

となり、 $g(x)$ と同様、 $h(5) = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$

のとき最小となる。

つまり、 $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 7)$

2.

$k \geq 5$ の時を考える。

S_k を $n = k$ の時の S とする。

また、 $n = k$ の時の S_k の最小値を M_k とする。

$n = k$ のとき、 $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = a_k = 2$ の時最小になると仮定すると

$$a_1 = d_1$$

$$a_2 = d_1 + d_2$$

\vdots

$$a_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

$$d_1 \geq 2, d_1 \dots d_n \geq 0$$

とすると $n = k + 1$ のときの S は

$$S = 1 - \frac{1}{d_1} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} \\ \dots \\ + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_{k+1}} - 2$$

となり、

$$f(x) = 1 - \frac{1}{d_1} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} + \dots + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + x} - 2$$

とすると、 $f'(x) = \frac{1}{(d_1 + d_2 + \dots + x)^2}$

となり、 $f(x)$ は単調増加。

したがって、 $f(x)$ は $f(0)$ において最小となる。

そのときの最小値は

$$M_{k+1} = f(x) = 1 - \frac{1}{d_1} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} + \dots + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} - 2$$

$$S_k = 1 - \frac{1}{d_1} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} + \dots + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} - 2$$

なので

$$M_{k+1} = S_k + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} = S_k + 1 - \frac{1}{a_k}$$

つまり

S_{k+1} は、 S_k の値にかかわらず $a_k = a_{k+1}$ のとき最小となる。

S_k が $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 2$ のとき最小となるので、

S_{k+1} は、 $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = 2$ のとき最小となる、

$n = 5$ の時

$$S_5 = 1 - \frac{1}{d_1} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} + 1 - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} - 2 \\ = 3 - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_1 + d_2} - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} - \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{d_1 + d_2} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 + d_2} + \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3} + \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} + \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \leq \frac{5}{2}$$

よって、 $S_5 > 0$

したがって、上記 $n = k$ の時と同様にして、 $d_5 = 0$ の時最小となり、かつ $S_5 > 0$

1. と同様に考えて、

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$$

のとき最小となって、最小値は $S_5 = \frac{1}{2}$

よって $n = 5$ のときは示されたので数学的帰納法より $n \geq 5$ のすべての n において成立する。

したがって、5 以上の k については、

$$M_k = \frac{n}{2} - 2$$

がなりたつ。

$$S_1 = 1 - \frac{1}{a_1} - 2 = \frac{1}{a_1} - 1 < 0$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{a_1} + 1 - \frac{1}{a_2} - 2 = -\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} < 0$$

より、 $n > 2$ でなければ、成立しないので、 S_3, S_4, S_5 を考えると

M_3 は 1. のとき

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 7) \rightarrow S_3 = \frac{1}{42}$$

M_4 は 1. と同様に考えて

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 2, 2, 3) \rightarrow S_4 = \frac{1}{6}$$

M_5 以上については、上記より $M_n = \frac{n}{2} - 2$ なので

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{2}$$

$\frac{n}{2} - 2$ は単調増加なので、最小となるのは、 $n = 5$ のとき

よって、すべての組合せにおいて、最小となるのは $M_3 = \frac{1}{42}$

つまり、最小となる組合せと S の最小値は

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 7), S = \frac{1}{42}$$