

京都大学 1976年 入学試験 文系数学 問題1

問題

1. 多項式 $f(x) = x^n$ が、区間 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ において不等式 $|f(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたすためには、 n をどのようにとればよいか。
2. 最高次の係数が1である多項式 $g(x)$ で、区間 $0 \leq x \leq 1$ において不等式 $|g(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたし、さらに $10000 < |g(3)| < 100000$ であるようなものの例を1つあげよ。

解答

1.

多項式なので、 n は正または0の整数

$n = 0$ の場合は、 $f(x) = 1$ より題意を満たさない。

よって、 $n \neq 0$

$n = 1$ の場合 $f(x) = x$ となり、 $f(1) = 1$ となり、題意を満たさない。

よって、 $n \neq 1$

したがって、 $n \geq 2$

$$f(x) = x^n \text{ より } f'(x) = nx^{n-1}$$

n が偶数の時

$$n = 2l \text{ とおく}$$

$$x < 0 \text{ の範囲で } f'(x) = nx^{n-1} < 0$$

$$x > 0 \text{ の範囲で } f'(x) = nx^{n-1} > 0$$

よって $f(x)$ は $x < 0$ の範囲で、単調減少、 $x > 0$ の範囲で、単調増加

したがって、区間 $\left[-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$ では

$$x = 0 \text{ において最小となり最小値は } f(0) = 0$$

よって $f(x) \geq 0$ なので、絶対値記号はそのままはせず。

$x = -\frac{1}{2}$ と $x = \frac{1}{2}$ のどちらか $f(x)$ の大きい方で最大となるが

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2l} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^l = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^l = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

より、 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ となり、最大値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$

この値が $< \frac{1}{1000}$ となれば十分

$$\text{したがって、} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \text{ より } 2^n > 1000$$

$$\text{よって、} n > \log_2 1000$$

$$2^{10} = 1024 \text{ より } n \geq 10$$

n が奇数の時

$$n = 2l + 1 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = nx^{n-1} \geq 0 \text{ より}$$

よって $f(x)$ は単調増加

したがって、区間 $\left[-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$ では

$x = -\frac{1}{2}$ において最小値をとり

$x = \frac{1}{2}$ において最大値を取る。

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2l+1} = -\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^l = -f\left(\frac{1}{2}\right)$$

より、 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$ となるので $|f\left(-\frac{1}{2}\right)| = |f\left(\frac{1}{2}\right)|$

よって、 $|f(x)|$ の最大値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$

この値が $< \frac{1}{1000}$ となれば十分

したがって、 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000}$ より $2^n > 1000$

よって、 $n > \log_2 1000$

$2^{10} = 1024$ より $n \geq 10$ であるが

n が奇数なので $n \geq 11$

両方の条件を合わせて

$$n \geq 10$$

2.

1. より

$g(x) = f(x - 1/2) = (x - 1/2)^n$ ($n \geq 10$) とすると

最高次数は n でその係数は 1 である

$$|g(x)| < \frac{1}{1000} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を満たす。

このとき、 $g(3) = \left(\frac{5}{2}\right)^n = \frac{5^n}{2^n}$ なので

$10000 < |g(3)| < 100000$ となれば条件を満たす。

$$10000 < \frac{5^n}{2^n} < 100000$$

$$10^4 2^n < 5^n < 10^5 2^n$$

$$5^4 2^{n+4} < 5^n < 5^5 2^{n+5}$$

$$2^{n+4} < 5^{n-4} < 5 \cdot 2^{n+5}$$

$$2^{n+4} < 5^{n-4}$$

$$(n+4) \log 2 < (n-4) \log 5$$

$$\frac{n+4}{n-4} < \frac{\log 5}{\log 2}$$

$$n > 10.05176637892824$$

$$n \geq 11$$

$$5^{n-4} < 5 \cdot 2^{n+5}$$

$$5^{n-5} < 2^{n+5}$$

$$(n-5) \log 5 < (n+5) \log 2$$

$$\frac{n-5}{n+5} < \frac{\log 2}{\log 5}$$

$$n < 12.5647079736603$$

$$n \leq 12$$

以上より、 $n = 11, 12$ であれば、条件を満たす。よって、すくなくとも

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^{11}$$

が条件を満たす。

実際に $g'(x) = 11\left(x - \frac{1}{2}\right)^{10} > 0$ より単調増加

よって、最大値は

$$g(1) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

$$g(3) = \left(\frac{5}{2}\right)^{11} = \frac{48828125}{2048}$$

$$10000 < \frac{48828125}{2048} < 100000$$

$$20480000 < 48828125 < 204800000$$

以上