

問題

1つの平面内にある、いくつかの0でないベクトルからなる集合  $S$  が条件

“ $a, b$  が  $S$  のベクトルであれば  $\frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}$  は整数である”

をみたしているという。ただし、 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  等はベクトルの内積をあらわす。

1.  $S$  の2つのベクトルの間の角は、 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  およびこれらの補角のうちの1つであることを示せ。
2. (1)において、角が  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  の場合には、2つのベクトルの長さの比はどうなるか。
3.  $30^\circ$  の角をなすベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を含み、12個のベクトルからなる集合  $S$  の例を図示し、各ベクトルを  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  であらわせ。

解答

1.

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a)$$

$$\mathbf{b} = (x_b, y_b)$$

とすると

$$\frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \frac{2(x_a x_b + y_a y_b)}{x_b^2 + y_b^2} \text{ これが整数なので}$$

$$\frac{2(x_a x_b + y_a y_b)}{x_b^2 + y_b^2} = n \text{ と表せる。}$$

したがって

$$2(x_a x_b + y_a y_b) = n(x_b^2 + y_b^2)$$

$$2x_a x_b + 2y_a y_b = n x_b^2 + n y_b^2$$

$$2x_a x_b - n x_b^2 = n y_b^2 - 2y_a y_b$$

$$x_b(2x_a - n x_b) = y_b(n y_b - 2y_a)$$

$$x_b(2x_a - n x_b) + y_b(2y_a - n y_b) = 0$$

$$\mathbf{c} = (2x_a - n x_b, 2y_a - n y_b) \text{ としたとき}$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

つまり、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  は直交する。

$$\mathbf{c} = (2x_a - n x_b, 2y_a - n y_b) = 2\mathbf{a} - n\mathbf{b} \text{ なので}$$

原点  $O$  から  $2\mathbf{a}$  を伸ばし、その点を  $A$

$A$  から  $\mathbf{b}$  と逆向きに  $n|\mathbf{b}|$  の長さにとった点を  $C$  とすると三角形  $OAC$  の角  $C$  は  $90^\circ$  となる。

$$\text{このとき、角 } A = \theta \text{ を考えると } \cos \theta = \frac{n|\mathbf{b}|}{2|\mathbf{a}|}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{n^2 |\mathbf{b}|^2}{2^2 |\mathbf{a}|^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{n^2 (\mathbf{b}, \mathbf{b})}{2^2 |\mathbf{a}|^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2n(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{2^2 |\mathbf{a}|^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{n(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{2(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

となるが  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  とともに  $S$  の要素なので

仮定より  $\frac{2(a, b)}{(a, a)}$  は整数。

したがってこれを  $m$  とおくと

$$\cos^2 \theta = \frac{nm}{4}$$

$m, n$  ともに整数なので  $mn = l$  とすると  $\cos \theta = \frac{\pm\sqrt{l}}{2}$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$  より

$$0 \leq l \leq 4$$

$l$  は  $(0, 1, 2, 3, 4)$  のどれかとなるので

$\cos \theta$  は  $(-1, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$  となる。

したがって、 $\theta$  は

$180^\circ, 150^\circ, 135^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 0^\circ$  となる。

角  $A$  は  $a$  と  $b$  のなす角の錯角なので値は等しい。

よって  $S$  の二つのベクトルのなす角は  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  およびその補角となる。

2.

角が  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  のとき

$$\cos \theta = \frac{1, \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

よって、 $l = 1, 3, 4$

$mn = 1, 3, 4$  であるから、 $(n, m) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1)$  の組がある。

$(n, m) = (1, 1)$  のとき

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{|b|}{2|a|}$$

より

$$\frac{|b|}{2|a|} = \frac{1}{2}$$

$$|b| = |a|$$

よって、二つのベクトルの長さは等しい

$(n, m) = (1, 3)$  のとき

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{|b|}{2|a|}$$

より

$$\frac{|b|}{2|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|b| = \sqrt{3}|a|$$

よって、二つのベクトルの長さの比は  $\sqrt{3}$

$(n, m) = (3, 1)$  のとき

$$\text{同様に } |a| = \sqrt{3}|b|$$

よって、二つのベクトルの長さの比は  $\sqrt{3}$

$(n, m) = (1, 4)$  のとき

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{|b|}{2|a|}$$

より

$$|b| = 2|a|$$

比は 2

$(n, m) = (2, 2)$  のとき

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{2|b|}{2|a|}$$

より

$$|a| = \sqrt{2}|b|$$

比は  $\sqrt{2}$

$(n, m) = (1, 4)$  のとき

同様に

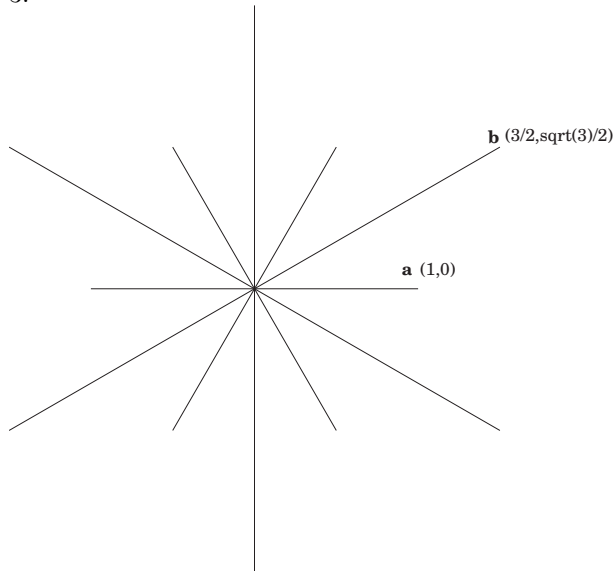
$$|a| = 2|b|$$

以上より、角が  $0^\circ$  のとき長さの比は 2 または  $\sqrt{2}$

$30^\circ$  のとき長さの比は  $\sqrt{3}$

$60^\circ$  のとき長さは等しい

3.



$S = \{a_1, \dots, a_{12}\}$  とし

$$a_1 = a = (1, 0)$$

$$a_2 = b = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とする。

$$a_3 = b - a$$

$$a_4 = 2b - 3a$$

$$a_5 = b - 2a$$

$$a_6 = b - 3a$$

$$a_7 = -a$$

$$a_8 = -b$$

$$a_9 = a - b$$

$$a_{10} = 3a - 2b$$

$$a_{11} = 2a - b$$

$$a_{12} = 3a - b$$