

問題

1つの平面内にある、いくつかの0でないベクトルからなる集合 S が条件

“ a, b が S のベクトルであれば $\frac{2(a, b)}{(b, b)}$ は整数である”

をみたしているという。ただし、 (a, b) 等はベクトルの内積をあらわす。

1. S の2つのベクトルの間の角は、 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびこれらの補角のうちの1つであることを示せ。
2. (1)において、角が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ の場合には、2つのベクトルの長さの比はどうなるか。
3. 30° の角をなすベクトル a, b を含み、12個のベクトルからなる集合 S の例を図示し、各ベクトルを a, b であらわせ。

解答

1.

$$\mathbf{a} = (x_a, y_a)$$

$$\mathbf{b} = (x_b, y_b)$$

とする
 $\frac{2(a, b)}{(b, b)}$ が整数なので
 $\frac{2(a, b)}{(b, b)} = n$ n は整数
 と表せる。

また、 a, b ともに S の要素なので、 a, b を入れ換えた

$\frac{2(a, b)}{(a, a)}$ も整数でなければならないので

$$\frac{2(a, b)}{(a, a)} = m$$
 m は整数

と表せる。

$$n(b, b) = m(a, a) \text{ となり}$$

$$n|b|^2 = m|a|^2 \text{ となる}$$

また

余弦定理より

a, b のなす角を θ とすると

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \cos \theta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \text{ より}$$

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = x_a^2 + y_a^2 + x_b^2 + y_b^2 - 2 \cos \theta \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}$$

$$x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b + y_a^2 + y_b^2 - 2y_a y_b = x_a^2 + y_a^2 + x_b^2 + y_b^2 - 2 \cos \theta \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}$$

$$-2x_a x_b - 2y_a y_b = -2 \cos \theta \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}$$

$$x_a x_b + y_a y_b = \cos \theta \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}$$

$$\cos \theta = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}}$$

$$x_a x_b + y_a y_b = \frac{m}{2} (x_a^2 + y_a^2) \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{m(x_a^2 + y_a^2)}{2\sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2(x_a^2 + y_a^2)^2}{4(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2(x_a^2 + y_a^2)}{4(x_b^2 + y_b^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2|\mathbf{a}|^2}{4|\mathbf{b}|^2}}
\end{aligned}$$

$$n|\mathbf{b}|^2 = m|\mathbf{a}|^2$$

より

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \sqrt{\frac{mn|\mathbf{b}|^2}{4|\mathbf{b}|^2}} \\
&= \sqrt{\frac{mn}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{mn}}{2}
\end{aligned}$$

m, n ともに整数なので $mn = l$ とすると $\cos \theta = \frac{\sqrt{l}}{2}$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より

$$0 \leq l \leq 4$$

l は $(0, 1, 2, 3, 4)$ のどれかとなるので

$\cos \theta$ は $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ となる。

したがって、 θ は

$\pm 90^\circ, \pm 60^\circ, \pm 45^\circ, \pm 30^\circ, 0^\circ$ となる。

よって S の二つのベクトルのなす角は $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびその補角となる。

2.

角が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ のとき

$$\cos \theta = 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

よって、 $l = 1, 3, 4$

$mn = 1, 3, 4$ であるから、 $(n, m) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ の組がある。

$(n, m) = (1, 1)$ のとき

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 \text{ となり}$$

二つのベクトルの長さは等しい

$(n, m) = (1, 3)$ のとき

$$|\mathbf{a}|^2 = 3|\mathbf{b}|^2 \text{ となり}$$

二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$

$(n, m) = (3, 1)$ のとき

同様に二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$

$(n, m) = (1, 4)$ のとき

$$|\mathbf{a}|^2 = 4|\mathbf{b}|^2 \text{ となり}$$

比は 2

$(n, m) = (2, 2)$ のとき

$|a|^2 = |b|^2$ となり

比は 1

$(n, m) = (1, 4)$ のとき

同様に

比は 2

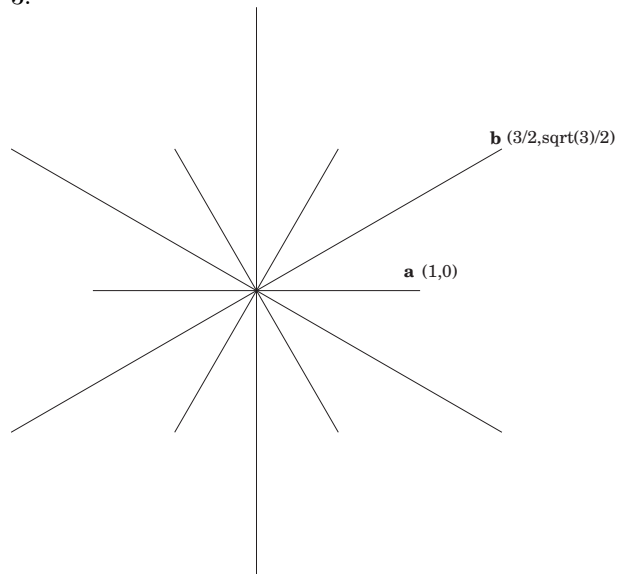
以上より、角が

0° のとき長さの比は 2 または 1

30° のとき長さの比は $\sqrt{3}$

60° のとき長さは比は 1

3.



$S = \{a_1, \dots, a_{12}\}$ とし

$$a_1 = a = (1, 0)$$

$$a_2 = b = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とする。

$$a_3 = b - a$$

$$a_4 = 2b - 3a$$

$$a_5 = b - 2a$$

$$a_6 = b - 3a$$

$$a_7 = -a$$

$$a_8 = -b$$

$$a_9 = a - b$$

$$a_{10} = 3a - 2b$$

$$a_{11} = 2a - b$$

$$a_{12} = 3a - b$$