

京都大学 1976年 入学試験 文系数学 問題3

問題

多項式 $f(x)$ で、等式

$$f(x)f'(x) + \int_1^x f(t) dt = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}$$

をみたしているものをすべて求めよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数をあらわす。

解答

$f(x)$ を n 次の多項式として、

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) とする。

$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \left[\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \dots + a_nx \right]_1^x \\ &= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \dots + a_nx - \left(\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n \right) \\ &= \frac{a_0}{n+1}(x^{n+1} - 1) + \frac{a_1}{n}(x^n - 1) + \dots + a_n(x - 1) \end{aligned}$$

$\int_1^x f(t) dt$ は $n+1$ 次

$f(x)f'(x)$ は $2n-1$ 次

その和が 1 次となるためには $n \geq 1$ の場合

$2n-1$ と $n+1$ が一致し、その係数が相殺する必要がある。

よって $n=2$

少なくとも $f(x) = ax^2 + bx + c$ の形でなければならない。

すると

$f'(x) = 2ax + b$

$\int_1^x f(t) dt = \frac{a}{3}(x^3 - 1) + \frac{b}{2}(x^2 - 1) + c(x - 1)$

となるので

$$\begin{aligned} f(x)f'(x) + \int_1^x f(t) dt &= (ax^2 + bx + c)(2ax + b) + \frac{a}{3}(x^3 - 1) + \frac{b}{2}(x^2 - 1) + c(x - 1) \\ &= (2a^2 + \frac{a}{3})x^3 + (3ab + \frac{b}{2})x^2 + (2ac + c + b^2)x + bc - c - \frac{b}{2} - \frac{a}{3} \\ &= \frac{4}{9}x - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

よって

$$2a^2 + \frac{a}{3} = 0$$

$$3ab + \frac{b}{2} = 0$$

$$2ac + c + b^2 = \frac{4}{9}$$

$$bc - c - \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = -\frac{4}{9}$$

$$2a^2 + \frac{a}{3} = 0 \text{ より}$$

$$a(2a + \frac{1}{3}) = 0$$

$$a = 0, -\frac{1}{6}$$

$$3ab + \frac{b}{2} = 0 \text{ より}$$

$$b(3a + \frac{1}{2}) = 0$$

$$b = 0 \text{ または } a = -\frac{1}{6}$$

$a = 0$ のとき

$$3ab + \frac{b}{2} = 0 \text{ より}$$

$$b = 0$$

$$2ac + c + b^2 = \frac{4}{9} \text{ より}$$

$$c = \frac{4}{9}$$

$$bc - c - \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = -\frac{4}{9} \text{ に代入すると}$$

$$-c = -\frac{4}{9} \text{ となり成立する。よって、} (a, b, c) = (0, 0, \frac{4}{9}) \text{ は条件を満たす。}$$

$$a = -\frac{1}{6} \text{ のとき}$$

$$2ac + c + b^2 = \frac{4}{9} \text{ より}$$

$$(2a + 1)c + b^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\frac{2}{6} + 1)c + b^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{3}c + b^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{3}c = \frac{4}{9} - b^2$$

$$c = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}b^2$$

$$bc - c - \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = -\frac{4}{9} \text{ に代入すると}$$

$$(b - 1)(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}b^2) - \frac{b}{2} + \frac{1}{18} = -\frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{3}(b - 1)(1 - \frac{9}{4}b^2) - \frac{b}{2} = -\frac{8}{18} - \frac{1}{18}$$

$$12(b - 1)(1 - \frac{9}{4}b^2) - 9b = -9$$

$$3(b - 1)(4 - 9b^2) - 9b = -9$$

$$3(b - 1)(4 - 9b^2) = 9(b - 1)$$

$$3(b - 1)(4 - 9b^2) - 9(b - 1) = 0$$

$$3(b - 1)(4 - 9b^2 - 3) = 0$$

$$3(b - 1)(1 - 9b^2) = 0$$

$$3(b - 1)(1 - 3b)(1 + 3b) = 0$$

$$b = 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$

このとき $c = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}b^2$ なので

$$b = 1 \rightarrow c = -\frac{5}{6}$$

$$b = \frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

以上より

$$(a, b, c) = (0, 0, \frac{4}{9}), (-\frac{1}{6}, 1, -\frac{5}{6}), (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$$

$n = 0$ の時は $(a, b) = (0, 0)$ の場合に相当するので、上の結果の一部。

よって求める多項式は

$$f(x) = \frac{4}{9}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{5}{6}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$