

京都大学 1977年 入学試験 文系数学 問題1

問題

2次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の2つの根(解) a, b を成分にもつ, 平面上のベクトル $u = (a, b)$ を考える. 同じ平面上のベクトル $v = (c, d)$ で, u と直交し, 長さが1であるものの成分 c, d を2つの根にもつ2次方程式を求めよ.

解答

(a, b) は $x^2 + x - 1 = 0$ の根なので

$$a + b = -1$$

$$ab = -1$$

$u = (a, b)$ が直交するベクトルは $(b, -a)$ または $(-b, a)$ に平行

長さが単位ベクトルであるためには、

$$\left(\pm \frac{b}{|u|}, \mp \frac{a}{|u|}\right)$$

これを $v = (c, d)$ とすると、

$$c = \pm \frac{b}{|u|}$$

$$d = \mp \frac{a}{|u|}$$

複号同順

したがって

$$c + d = \pm \frac{b}{|u|} + \mp \frac{a}{|u|}$$

$$cd = -\frac{b}{|u|} \frac{a}{|u|}$$

$$|u|^2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 + 2 = 3 \text{ より}$$

$$c + d = \pm \frac{b - a}{\sqrt{3}}$$

$$cd = -\frac{ab}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(b - a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 3 + 2 = 5$$

$$b - a = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{したがって } c + d = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

以上より

(c, d) を解とする2次方程式は

$$e(x - c)(x - d) = ex^2 - (c + d)ex + ecd = 0 \text{ なので}$$

$$ex^2 - (c + d)ex + ecd = e\left(x^2 \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

両辺に3をかけて

$$e(3x^2 + \sqrt{15}x + 1) = 0$$

$$e(3x^2 - \sqrt{15}x + 1) = 0$$

$$e \neq 0$$

の二つ