

京都大学 1977年 入学試験 文系数学 問題2

問題

正の数  $a$  に対し, 関数  $f(x) = ax - (1 + a^4)x^3$  を考える. この関数のグラフが  $x$  軸の正の部分と交わる点の  $x$  座標を  $c$  とし, 積分  $S_a = \int_0^c f(x) dx$  を考える.  $a$  の値をいろいろ変えたとき,  $S_a$  の値が最大になるような  $a$  の値を求めよ.

解答

$f(x) = x(a - (1 + a^4)x^2)$  を解くと

$$x = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}$$

$c$  はこの正の方なので

$$c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}$$

$$\text{よって } S_a = \int_0^c f(x) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}} ax - (1 + a^4)x^3 dx \\ &= \left[ \frac{a}{2}x^2 - \frac{(1 + a^4)}{4}x^4 \right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}}} \\ &= \frac{a}{2} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}} \right)^2 - \frac{(1 + a^4)}{4} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4 + 1}} \right)^4 \\ &= \frac{a}{2} \left( \frac{a}{a^4 + 1} \right) - \frac{(1 + a^4)}{4} \left( \frac{a}{a^4 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{2(a^4 + 1)} - \frac{a^2}{4(a^4 + 1)} \\ &= \frac{a^2}{4(a^4 + 1)} \end{aligned}$$

$$S_a = \frac{a^2}{4(a^4 + 1)}$$

$$\frac{d}{da} S_a = - \frac{(a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)}{2(a^4 + 1)^2}$$

$\frac{d}{da} S_a = 0$  の実数解は,  $a = -1, 0, 1$  である。

したがって,  $S_a$  は  $a > 0$  のでは範囲  $0 < a < 1$  の範囲で単調増加

$a = 1$  で極大

$a > 1$  で単調減少

したがって,  $S_a$  は  $a > 0$  の範囲では  $a = 1$  で最大となる。

$S_a$  を最大とする  $a$  は

$$a = 1$$