

京都大学 1977年 入学試験 文系数学 問題3

問題

$n$  個の自然数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を, 次の 2 条件 (i), (ii) を同時にみたすように選ぶとき, 選び方は何通りあるか.

1. どの  $a_i$  も  $1, 2, \dots, m$  ( $m > n$ ) の中から選ぶ.
2.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  のうち, 適当な  $n-1$  個を選べば, それらは互いに異なる.

解答

相異なる  $n-1$  個を選び出し, それに 1 個を任意付け加えたものはこの条件を満たす。  
最後に選び出した  $a_n$  が  $a_k$  ( $k < n$ ) と一致した場合は  $a_n$  と  $a_k$  を入れ替えたものが重複するので組み合わせは半分になる。

したがって組み合わせの総数は

$$\begin{aligned} & {}_{n-1}C_m \times (n-1) \div 2 + {}_{n-1}C_m \times (m-n+1) \\ &= {}_{n-1}C_m ((n-1) \div 2 + (m-n+1)) \\ &= \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{(n-1)!} \frac{n-1+2m-2n+2}{2} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{(n-1)!} \frac{2m-n+1}{2} \\ &= \frac{(2m-n+1)m(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{2(n-1)!} \end{aligned}$$

選び方は

$$\frac{(2m-n+1)m(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{2(n-1)!} \text{通り}$$