

問題

角 θ の回転を表わす行列を $R(\theta)$ とする. すなわち $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする. 2次正方行列 X で, $X^3 = R(\theta)$ をみたすものはどれだけあるかを考えたい.

1. 行列 X が, $X^3 = R(\theta)$ をみたせば, X は逆行列をもち, かつ $R(\theta)X = XR(\theta)$ が成立することを示せ.
2. 行列 X が, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が0であるような行列 T との積であるとする. すなわち $X = R(\alpha)T$, ただし $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a > 0$ とする.
このとき, もし X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたし, さらに θ が π の整数倍でなければ, $a = c, b = 0$ であることを示せ.
3. 一般に, 逆行列をもつ任意の行列 X は, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が0であるような行列 T との積 $X = R(\alpha)T$ として表わされる. 行列に対応する1次変換を考えることによって, このことを示せ.
4. $X^3 = R(\theta)$ をみたす行列 X は, θ が π の整数倍でなければ, ちょうど3個存在し, θ が π の整数倍ならば, 無限に多く存在することを示せ.

解答

1.

X が $X^3 = R(\theta)$ を満たすので

X は零行列ではない

両辺に左から X をかけて $XX^3 = XR(\theta)$

また右から X をかけて $X^3X = R(\theta)X$

がともに成立する。

$XX^3 = X^3X = X^4$ なので

$R(\theta)X = XR(\theta)$

$R(\theta)$ には逆行列が存在するのでそれを $R^{-1}(\theta)$ とすると

定義より $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$

$XR(\theta) = R(\theta)X$ に

左右から $R(-\theta)$ をかけると

$R(-\theta)XR(\theta)R(-\theta) = R(-\theta)R(\theta)XR(-\theta)$

$R(-\theta)X = XR(-\theta)$

$X^3 = R(\theta)$ に右から $R(-\theta)$ をかけて

$X^3R(-\theta) = E$

$R(-\theta)X = XR(-\theta)$ より

$X^2R(-\theta)X = E$

つまり $X^2R(-\theta)$ は X の左逆行列となっている。

同様に左から $R(-\theta)$ をかけて

$$R(-\theta)X^3 = E$$

$$XR(-\theta)X^2 = E$$

となり

$R(-\theta)X^2 = XR(-\theta)X = X^2R(-\theta)$ は右逆行列になる。

よって X の逆行列は存在する。

2.

$$X = R(\alpha)T \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (a > 0)$$

であるとする。

X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたすならば

$$R(\theta)R(\alpha)T = R(\alpha)TR(\theta)$$

左から $R(-\theta)$ をかけて

$$R(-\theta)R(\theta)R(\alpha)T = R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$$

$$R(\alpha)T = R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$$

左から $R(-\alpha)$ をかけて

$$T = R(-\alpha)R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$$

$R(\theta)R(\alpha)$ は回転行列の定義から

$$R(\theta)R(\alpha) = R(\theta + \alpha) \quad \text{なので}$$

$$T = R(-\alpha - \theta + \alpha)TR(\theta)$$

$$T = R(-\theta)TR(\theta)$$

左から $R(\theta)$ をかけて

$$TR(\theta) = R(\theta)T$$

要素に展開すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta & -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \sin \theta & c \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta & b \cos \theta - c \sin \theta \\ a \sin \theta & b \sin \theta + c \cos \theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= a \cos \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta &= b \cos \theta - c \sin \theta \\ c \sin \theta &= a \sin \theta \\ c \cos \theta &= b \sin \theta + c \cos \theta \end{aligned}$$

が成立する。

$$a \cos \theta + b \sin \theta = a \cos \theta \quad \text{より}$$

$$b \sin \theta = 0$$

しかし $\theta \neq n\pi$ なので $\sin \theta \neq 0$

$$\text{よって } b = 0$$

$$c \sin \theta = a \sin \theta \quad \text{より } \theta \neq n\pi \quad \text{なので } \sin \theta \neq 0$$

$$c = a$$

3.

X が逆行列を持つとしてそれを X^{-1} と表す。

行列 X に対応する 1 次変換を考える。

$$X = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \text{ とする}$$

逆行列が存在するので $sv - ut \neq 0$

したがって s, u とともに 0 とはならないので $s^2 + u^2 > 0$

このとき

点 (x, y) を考えると $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ なので

1 次変換においては線形性が保証されるので $(1, 0), (0, 1)$ についての変換だけを考えればよい。

$$X(1, 0) = (s, u) = \frac{1}{s^2 + u^2}(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$X(0, 1) = (t, v)$$

と表すことができる。

したがって

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s^2 + u^2}} \cos \alpha & s \\ \frac{1}{\sqrt{s^2 + u^2}} \sin \alpha & t \end{pmatrix} \text{ と表すことができる。}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{s^2 + u^2}}$$

$$m = t \cos \alpha + v \sin \alpha$$

$$n = v \cos \alpha - t \sin \alpha$$

$$\text{とおくと } t = m \cos \alpha - n \sin \alpha$$

$$v = m \sin \alpha + n \cos \alpha$$

なので

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} l \cos \alpha & m \cos \alpha - n \sin \alpha \\ l \sin \alpha & m \sin \alpha + n \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定義より $l > 0$

よって $X = R(\alpha)T$ と表せる。

4.

$X^3 = R(\theta)$ をみたく行列 X が存在するとすれば 1. より逆行列が存在し 3. によって $X = R(\alpha)T$ と表すことができる。

1. より $XR(\theta) = R(\theta)X$ なので

2. より $X = R(\alpha)T$ とすると $\theta \neq n\pi$ ならば

$$T = \begin{pmatrix} l & 0 & l \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = lE$$

となる。

よって

$$X^3 = R(\alpha)TR(\alpha)TR(\alpha)T \text{ なので}$$

$$X^3 = l^3 R(3\alpha)$$

$$\text{よって } R(\theta) = l^3 R(3\alpha)$$

したがって

$$\cos \theta = l^3 \cos 3\alpha$$

$$\sin \theta = l^3 \sin 3\alpha$$

右辺を変形して

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

より

$$\cos \theta = l^3(4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)$$

$$\sin \theta = l^3(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

$$\cos^2 \theta = (l^3(4 \cos^2 \alpha - 3) \cos \alpha)^2$$

$$\sin^2 \theta = (l^3(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha)^2$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = (l^3(4 \cos^2 \alpha - 3) \cos \alpha)^2 + (l^3(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha)^2$$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ なので

$$\begin{aligned} & (l^3(4 \cos^2 \alpha - 3) \cos \alpha)^2 + (l^3(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha)^2 \\ &= l^6 \cos^2 \alpha (16 \cos^4 \alpha - 24 \cos^2 \alpha + 9) + l^6 \sin^2 \alpha (16 \sin^4 \alpha - 24 \sin^2 \alpha + 9) \\ &= l^6 (16 \cos^6 \alpha - 24 \cos^4 \alpha + 9 \cos^2 \alpha + 16 \sin^6 \alpha - 24 \sin^4 \alpha + 9 \sin^2 \alpha) \\ &= l^6 (16 \cos^6 \alpha + 16 \sin^6 \alpha - 24 \cos^4 \alpha - 24 \sin^4 \alpha + 9) \\ &= l^6 (16(1 - \sin^2 \alpha)^3 + 16 \sin^6 \alpha - 24(1 - \sin^2 \alpha)^2 - 24 \sin^4 \alpha + 9) \\ &= l^6 (16 - 48 \sin^2 \alpha + 48 \sin^4 \alpha - 16 \sin^6 \alpha + 16 \sin^6 \alpha - 24 + \\ &\quad 48 \sin^2 \alpha - 24 \sin^4 \alpha - 24 \sin^4 \alpha + 9) \\ &= l^6 = 1 \end{aligned}$$

よって $l^6 = 1$

l は実数なので $l = \pm 1$

しかし $l > 0$ なので $l = 1$

以上より

$$R(\theta) = R(3\alpha)$$

したがって

$$\cos \theta = \cos 3\alpha$$

$$\sin \theta = \sin 3\alpha$$

したがって

$$\theta = 3\alpha + 2n\pi \quad \alpha = \frac{\theta - 2n\pi}{3}$$

以上より

$$\alpha = \frac{\theta - 2n\pi}{3}$$

整数 n は k, l は整数で $n = 3k + l$ ($0 \leq l \leq 2$) と表せるので

$$\alpha = \frac{\theta - 2(3k + l)\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{\theta - 2l\pi}{3} - 2k\pi$$

となり

角として考える場合 $2k\pi$ は無視してよい

したがって X は

$$\alpha = \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}$$

の三つ

$\theta = n\pi$ ならば

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\pi & -\sin n\pi \\ \sin n\pi & \cos n\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ なので}$$

$$X^3 = \pm E$$

$X^3 = E$ のとき

$$X^2 = X^{-1}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ よって}$$

$$a^2 + bc = \frac{d}{ad - bc}$$

$$ab + bd = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$ac + cd = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$bc + d^2 = \frac{a}{ad - bc}$$

$$b(a + d)(ad - bc) = -b$$

$$c(a + d)(ad - bc) = -c$$

$$(a^2 + bc)(ad - bc) = d$$

$$(bc + d^2)(ad - bc) = a$$

$b = 0, c = 0$ とすると

$ad - bc \neq 0$ より $ad \neq 0$ なので

$$(a^2)(ad) = d$$

$$a^3 = 1$$

同様に $d^3 = 1$

となり $X = E$

$b \neq 0, c = 0$ ならば

$$(a + d)ad = -1$$

$$a^3d = d$$

$$a^3 = 1 \text{ となり } a = 1$$

したがって $(d + 1)d = d^2 + d + 1 = 0$ となるがこれは実数解を持たないので $b = 0$

つまり $c = 0$ ならば $b = 0$

$b \neq 0, c \neq 0$ ならば

$$(a + d)(ad - bc) = -1$$

$$(a^2 + bc)(ad - bc) = d$$

$$(bc + d^2)(ad - bc) = a$$

$4bc + 3 < 0$ の範囲で

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{-4bc - 3}}{2}$$

$$d = \frac{-1 \pm \sqrt{-4bc - 3}}{2}$$

複号同順

となり, X は無限に存在する。

$X^3 = -E$ の場合も同様に

$X = -E$ または

$4bc + 3 < 0$ の範囲で

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{-4bc - 3}}{2}$$

$$d = \frac{-1 \pm \sqrt{-4bc - 3}}{2}$$

複号同順

となりの X は無限に存在する。

証明終了