

京都大学 1982年 入学試験 文系数学 問題3

問題

C を $y = x^3 - x$ のグラフ, P を原点と異なる C 上の点とする.

1. 点 P における曲線 C の接線は, P と異なる点 Q で交わることを示せ.
2. 曲線 C と線分 PQ で囲まれた部分は, y 軸 $x = 0$ によって, どのような面積の比に分けられるか.

解答

1.

点 P の x 座標を t とすると, 点 P の接線の傾きは $3t^2 - 1$

そしてその接線の式を $y = (3t^2 - 1)x + c$ とすると

この接線は $(t, t^3 - t)$ を通るので

$$t^3 - t = (3t^2 - 1)t + c$$

が成立するので $c = -2t^3$ となる。

よって接線の式は $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$

C とこの直線の交点は $x^3 - x - (3t^2 - 1)x + 2t^3 = x^3 - 3t^2x + 2t^3 = (x - t)^2(x + 2t) = 0$ の解である

これにより $x = t$ 以外に $x = -2t$ という解が存在し, P は原点ではないので $t \neq 0$ よって $-2t \neq t$ より P とは異なる点 Q で交わる。

2.

Q の x 座標は $-2t$ なので囲まれた部分の面積は

$$\int_{-2t}^t x^3 - 3t^2x + 2t^3 dx \text{ である。}$$

$x = 0$ によって分けると t と $-2t$ は常に符号が異なるので

$$\int_{-2t}^0 x^3 - 3t^2x + 2t^3 dx \text{ と } \int_0^t x^3 - 3t^2x + 2t^3 dx \text{ に分けられる。}$$

それぞれの面積を計算すると

$$\int_{-2t}^0 x^3 - 3t^2x + 2t^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t^2}{2}x^2 + 2t^3x \right]_{-2t}^0 = 6t^4$$

$$\int_0^t x^3 - 3t^2x + 2t^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t^2}{2}x^2 + 2t^3x \right]_0^t = \frac{3t^4}{4}$$

したがって面積は P の側の面積を S_P , Q の側の面積を S_Q とすると

$$S_P : S_Q = 1 : 8$$

証明終了