

京都大学 1983年 入学試験 理系数学 問題3

問題

$ab + cd = 0, ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある。ただし, a, c は負でないとする。

1. $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ。ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

2. O を原点とする座標平面上の1次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ1のベクトル $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

から, ベクトル $\vec{OP}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を $\gamma (-\pi < \gamma \leq \pi)$ とする(したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる)。 (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする \vec{OP} を求めよ。ただし, $0 < u < 1$ とする。

解答

1.

$a = 0$ ならば $ab = 0$ より $cd = 0$

よって c, d のいずれかが 0 となる。

$c = 0$ とすると $ad - bc = 0$ となって条件に反するので $d = 0$ なので

$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ となる。

ここで $\theta = \frac{\pi}{2}, v = c, u = -\frac{b}{c}$ とすると

$A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -uv \sin \theta \\ v \sin \theta & uv \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ となり, 表すことができる。

$a \neq 0$ の場合を考える。

$ab + cd = 0$ より $b = 0$ ならば $ab = 0$ より $c = 0$ または $d = 0$ なので

$d = 0$ とすると $ad - bc = 0$ なり条件に反するので $c = 0$

よって $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ と表せる。

ここで $\theta = 0, v = a, u = \frac{d}{a}$ とすると

$\begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -uv \sin \theta \\ v \sin \theta & uv \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = A$ となり

表すことができる。

$a \neq 0, b \neq 0$ の時を考える。

$ab \neq 0$ なので $cd \neq 0$ よって $c \neq 0, d \neq 0$

このとき $\tan \theta = \frac{c}{a}$ となる θ をとることができる。

θ をこのような値だとすると $t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ として

$a = t \cos \theta$

$c = t \sin \theta$

と表すことができる。

$$ab + cd = 0 \text{ より}$$

$$ab = -cd$$

$a \neq 0, d \neq 0$ なので

$$\frac{b}{d} = -\frac{c}{a}$$

$$\text{よって } \frac{b}{d} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} \text{ とすると}$$

$$b = -s \sin \theta$$

$d = s \cos \theta$ となる。

$$v = t, u = \frac{s}{t} \text{ とすると}$$

$$\begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -uv \sin \theta \\ v \sin \theta & uv \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos \theta & -s \sin \theta \\ t \sin \theta & s \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

となり、表すことができる。

2.

$$A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ なので}$$

この操作は P を y 軸方向に u 倍し θ 回転し、 v 倍することになる。

$x \geq 0, y \geq 0$ かつ $0 < u < 1$ なので始めの操作は y 軸方向の縮小をすることになり

OP と x 軸の角を α とし OP と x 軸の正の部分との角を β とすると

$\alpha \geq \beta \geq 0$ となる。

$$\gamma = \beta + \theta - \alpha \text{ なので}$$

$\theta > 0$ の場合

$\beta - \alpha \leq 0$ より $\gamma \leq \theta$ となる。

したがって θ は一定なので γ が大きくなるためには $\beta - \alpha$ が 0 になればいい。

y 軸方向の縮小によって角度が変化しないためには \vec{OP} が x 軸または y 軸に一致すればいい

よって \vec{OP} が $(1, 0), (0, 1)$ のとき

$\theta \leq 0$ の場合 $\gamma = \theta + \beta - \alpha < 0$ となりこれが最大となるのは $\beta = \alpha$ のとき

同様に \vec{OP} が $(1, 0), (0, 1)$ のとき

証明終了