

問題

3つのベクトル \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} はたがいに直交している. 点Oより直線BC, CA, ABに垂線をひき, その交点をそれぞれP, Q, Rとする.

1. 四面体OPQRの四面体OABCに対する体積比を, \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} の長さ a, b, c で表せ.
2. 四面体OPQRの体積は四面体OABCの体積の $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ.

解答

PQRはそれぞれBC, CA, AB上の点なので平面ABC上の点

したがってPQRを底面としたときの四面体OPQRの高さはABCを底面としたときの四面体OABCの高さと一致する。

四面体は三角錐なのでその体積は底面の面積 S , 高さを h とすると $\frac{1}{3}Sh$ なので

四面体OQPRと四面体OABCの体積の比は三角形PQRと三角形ABCの面積の比に一致する。

Oを原点とし, \vec{OA} を x 軸, \vec{OB} を y 軸, \vec{OC} を z 軸, となるような座標系をとるとA, B, Cの座標はそれぞれ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ となる。Rの座標は $y = -\frac{b}{a}x + b$ と $y = \frac{a}{b}x$ の交点なので

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}, 0\right)$$

同様に

$$Q \text{ の座標は } \left(\frac{c^2a}{c^2+a^2}, 0, \frac{ca^2}{c^2+a^2}\right)$$

$$P \text{ の座標は } \left(0, \frac{b^2c}{b^2+c^2}, \frac{bc^2}{b^2+c^2}\right)$$

点PはBC上の点なので $s\vec{b} + (1-s)\vec{c} = \vec{p}$ となる s が存在する

したがって $s(0, b, 0) + (1-s)(0, 0, c) = \left(0, \frac{bc^2}{b^2+c^2}, \frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)$ となり

$$sb = \frac{bc^2}{b^2+c^2} \text{ であるので、}$$

$$s = \frac{c^2}{b^2+c^2}, (1-s) = \frac{b^2}{b^2+c^2} \text{ となる}$$

同様に

$$t\vec{c} + (1-t)\vec{a} = \vec{q} \text{ となる } t \text{ は}$$

$$t = \frac{a^2}{a^2+c^2}$$

$$u\vec{b} + (1-u)\vec{c} = \vec{r} \text{ となる } u \text{ は}$$

$$u = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

以上より

$$BP : PC = b^2 : c^2$$

$$AQ : QC = a^2 : c^2$$

$$AR : RB = a^2 : b^2$$

ここで三角形AQRを考える。

三角形ABCと三角形AQBは底辺の比がAC:AQで高さが等しい三角形なので面積比は底辺の比に等しい。

同様に三角形AQBと三角形ARQの面積比はAB:ARに等しいので

三角形AQRと三角形ABCの面積比は $\frac{AR}{AB}$ と $\frac{AQ}{AC}$ の積になる。

したがって三角形 AQR の面積は $S \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{a^2}{a^2 + c^2}$

同様に

三角形 BPR の面積は $S \frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{b^2}{b^2 + c^2}$

三角形 CQP の面積は $S \frac{c^2}{a^2 + c^2} \frac{c^2}{b^2 + c^2}$

となる。

三角形 PQR の面積は三角形 ABC から AQR, BPR, CQR を引いたものなので

$$\begin{aligned} T &= S \left(1 - \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{b^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \frac{c^2}{b^2 + c^2} \right) \right) \\ &= S \left(\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)} \right) \end{aligned}$$

四面体 OABC の体積と四面体 OPQR の体積の比は上述の通り面積比と等しいので

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)}$$

2.

相加平均 \geq 相乗平均より

$$\frac{b^2c^4 + a^2c^4 + b^4c^2 + a^4c^2 + a^2b^4 + a^4b^2}{6} \geq \sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^{12}}$$

a, b, c のうち一つでも 0 であると四面体を構成できないのですべて 0 ではない。

よって $(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2) > 0$

$$(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2) - 2a^2b^2c^2 \geq 6a^2b^2c^2$$

$$(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2) \geq 8a^2b^2c^2$$

$$\frac{8a^2b^2c^2}{(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)} \leq 1$$

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2 + a^2)(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{4}$$

よって、体積比は $\frac{1}{4}$ 以下

証明終了